Optimierungsprobleme in der Mechanik

Stein, Erwin
Barthold, Franz-Joseph

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1995 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.45-51

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

ERWIN STEIN, Hannover · FRANZ -JOSEPH BARTHOLD, Hannover

Optimierungsprobleme in der Mechanik

Braunschweig, 13. Oktober 1995*

1. Entwicklung der Optimierung in der Mechanik, der Mathematik und in den technischen Anwendungen

Im Prozeß der Evolution von Natur und Menschheit sind viele Weiterentwicklungen erkennbar, die als zielgerichtet und damit als optimal verstanden werden können.

Auch die Mathematik und die Mechanik sind durch Optimierungsprobleme wesentlich in ihrer Entwicklung vorangetrieben worden, wobei hinter einigen berühmten Fragestellungen sowohl der Spieltrieb des Geistes als auch praktische – später technische – Interessen standen.

Die ersten bekannten Anregungen zur Behandlung von Optimierungsaufgaben findet man in der römischen Mythologie in Gestalt der Königin Dido, die nach der optimalen Form eines Seils von gegebener Länge L fragte, damit dieses Seil eine Fläche mit möglichst großem Inhalt umschließt, nämlich eine möglichst große Grundstücksfläche als ihr Eigentum. Dem Griechen Archimedes (285–112 v. Chr.) gelang als erstem eine Näherunglösung der in unserem heutigen Sprachgebrauch als ‚isoperimetrisches Variationsproblem' bezeichneten Optimierungsaufgabe. Dabei umfaßt der Halbkreisbogen mit der Länge L den größtmöglichen Flächeninhalt $A = L^2/2\pi$.

In der geschichtlichen Entwicklung führten diese und ähnliche Aufgabenstellungen zu einer stetigen Weiterentwicklung der mathematischen Hilfsmittel, die als ersten Höhepunkt in der Entwicklung der Infinitesimal- und Integralrechnung durch I. Newton (1642–1727) und G. W. Leibniz (1646–1716) gipfelte. Damit waren die grundlegenden Voraussetzungen zur Entwicklung der Variationsrechnung durch L. Euler (1707–1783) und J. L. de Lagrange (1736–1813) geschaffen, die sich seitdem mit den modernen funktionalanalytischen Methoden und allgemeiner der Operatoranalysis als die sowohl grundlegende als auch leistungsstarke mathematisches Methode zur Behandlung einer Vielzahl von Optimierungsproblemen in der Mechanik erwies.

Am Beginn der eigentlichen Entwicklung der Variationsrechnung am Ende des 17. Jahrhunderts stand das ‚Problem der Brachistochrone', d. h. der Frage nach dem im Schwerefeld schnellsten Weg eines Massepunktes zwischen zwei Punkten mit verschiedenen Höhen- und Längenkoordinaten. Dieses berühmte Beispiel zur Lösung von Variationsaufgaben mit Nebenbedingungen (isoperimetrisches Variationsproblem) wurde von Johann Bernoulli im Jahre 1696 in der von Leibniz herausgegebenen Zeitschrift ‚Acta Eruditorum Lipsiae' veröffentlicht und initialisierte den Forscherdrang einer Vielzahl

* Zusammenfassung eines Vortrags vor der Plenarversammlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft.

berühmter mathematischer Gelehrter wie z. B. Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli, Huygens, L'Hospital. Neben der Lösung des Brachistochronen-Problems als gewöhnliche Zykloide durch Leibniz im Jahre 1697 wurde die Variationsrechnung dabei soweit entwickelt, daß in den darauffolgenden Jahrzehnten ähnliche mechanische Problemstellungen behandelt werden konnten.

In diesem Kontext entstanden die Arbeiten von Maupertuis (1747) über das ‚Prinzip der kleinsten Wirkung' und von C. F. Gauß (1827) über das ‚Prinzip des kleinsten Zwangs', in deren Extremalaussagen sowohl mechanische Postulate als auch weltanschauliche Spekulationen wie z. B. das Leibnizsche Postulat ‚dieser Welt als der besten aller denkbaren Welten' Eingang finden.

Für die Entwicklung der heutigen Festkörpermechanik erwiesen sich insbesondere das Dirichletsche Prinzip (nach P. G. L. Dirichlet, 1805–1859) und das Hamiltonsche Integralprinzip der Starrkörperkinetik (nach Sir W. Hamilton, 1805–1865) als besonders bedeutend. Bei dem erstgenannten Prinzip wird postuliert, daß die gesamte potentielle Energie im Gleichgewichtszustand einen minimalen Wert annimmt, sofern die mechanischen Spannungen und die äußeren Kräfte aus Potentialen herleitbar sind.

Diese klassischen Variationsprinzipien wurden für vielfältige mechanische Aufgabenstellungen weiterentwickelt und in Form von Variationsungleichungen auf Problemstellungen mit Ungleichungsnebenbedingungen erweitert. Hierbei sei insbesondere auf die in den fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts entstandene Kuhn-Tucker-Theorie verwiesen, die in der Plastizitätstheorie oder bei Kontaktproblemen ihre Anwendung findet.

Neben der fortgeschrittenen Entwicklung der theoretischen Grundlagen der Variationsrechnung fehlten jedoch bis zu Beginn der fünfziger Jahre leistungsfähige Berechnungsmethoden zur Behandlung realistischer Ingenieurstrukturen. Der Durchbruch zu den heutigen effizienten direkten numerischen Variationsverfahren basiert auf den Arbeiten von W. Ritz (1908), der die sogenannten ‚Ritz-Ansätze' in das Extremalprinzip einführte, sowie von B. G. Galerkin (1915), der in der variationellen Form die Orthogonalität der Ansatzfunktionen bezüglich der Residuen der Feldgleichungen als methodisches Prinzip verwendete. Erst mit dem Aufkommen der elektronischen Rechner nach 1950 wurde die Anwendung der auf den Ritzschen und Galerkinschen Ideen basierenden Finite-Elemente-Methode (mit Parameteransätzen in finiten Teilgebieten) zur bisher leistungsfähigsten numerischen Berechnungsmethode für komplexe technische Problemstellungen ermöglicht.

Neben der speziellen Approximation der Variationsformulierung, die zu endlich dimensionalen, linearen oder nichtlinearen algebraischen Gleichungssystemen, ggfs. unter Berücksichtigung weiterer nichtlinearer Gleichungs- bzw. Ungleichungsnebenbedingungen, führt, sind die hierzu gehörigen Lösungsalgorithmen bestimmend für die effiziente Behandlung der Ingenieuraufgaben.

Mit zunehmender Komplexität sind zunächst die direkten bzw. iterativen Löser für lineare Gleichungssysteme unterschiedlicher Struktur, die Algorithmen zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme, wie z. B. das Newton- bzw. die unterschiedlichen Quasi-Newton-Verfahren, zu nennen. Die Behandlung restringierter Probleme ist mit den Algorithmen der mathematischen Optimierung möglich, die jeweils spezielle Eigenschaften der Problemformulierung zur effektiven Lösung ausnutzen. Beispielhaft seien genannt: das Penalty-Verfahren zur Überführung der restringierten Probleme in unrestringierte Formulierungen und die zugehörige Lösung mit Newton-Verfahren; das Bertsekas-Verfahren als projiziertes Newtonverfahren für Probleme mit separablen, linearen Ungleichungsnebenbedingungen; die SQP-Verfahren (Sequential Quadratic Programming) als leistungsstarke Algorithmen für allgemeine nichtlineare Probleme mit nichtlinearen Nebenbedingungen ohne spezifische Struktur; und weiterhin die sogenannten ‚dualen Verfahren' wie z. B. ‚SCP' (Sequential Convex Programming) und ‚MMA' (Method of Moving Asymptotes), die die originäre Minimalaufgabe in den primalen Unbekannten in zugehörige (duale) Maximierungsprobleme für die Lagrange-Multiplikatoren verwandeln. Diese Optimierungsalgorithmen benötigen alle die Gradienten der betrachteten Zielfunktion sowie der Nebenbedingungen bezüglich der primalen Unbekannten, die aus der mechanischen Modellbildung der Aufgabe, d. h. der Wahl der Variationsformulierung und der zugehörigen Diskretisierung, hergeleitet werden müssen.

Die Bereitstellung aussagekräftiger Variationsformulierungen, die zugehörige Diskretisierung in Raum und Zeit unter Beachtung ihrer mathematischen Eigenschaften hinsichtlich Konvergenz und Stabilität sowie die effiziente Bereitstellung der erforderlichen Gradienten im Rahmen algorithmisch vollständiger (konsistenter) Linearisierungen bilden heutzutage Schwerpunkte der ‚Computational Mechanics'.

2. Strukturoptimierung

Die Aufgaben des Ingenieurs im Entwicklungsprozeß eines Bauwerks bestehen aus dem ständigen Kreislauf der folgenden Arbeitsschritte:

konstruieren – berechnen – bewerten (Erfahrung sammeln) – verbessern – lernen.

Die numerischen Methoden zur Berechnung vielfältiger Ingenieurstrukturen, wie z. B. die Strukturanalyse mittels der Finite-Elemente-Methode, haben inzwischen weite Verbreitung und Akzeptanz gefunden. Demgegenüber sind die algorithmischen Werkzeuge zur Strukturoptimierung, d. h. zur zielgerichteten Unterstützung des Konstruktionsprozesses, noch weitestgehend im Entwicklungsstadium und daher noch nicht in die tägliche Ingenieurtätigkeit integriert.

Der Ausgangspunkt jeder Optimierung, also sowohl einer intuitiven erfahrungsbedingten Verbesserung von Hand als auch einer zielgerichteten, mit dem Computer durchzuführenden, algorithmischen Bearbeitung, erfordert zunächst eine problemgerechte Definition des gewünschten Optimierungsziels, d. h. der Zielfunktion oder mehrerer Teilziele, die Festlegung der einzuhaltenden Nebenbedingungen und die Auswahl geeigneter Designvariablen. Die möglichen Modifikationen einer Struktur bestimmen dabei die Art der betrachteten Strukturoptimierung, d. h. man unterscheidet bei steigender Komplexität die Problemstellungen:

- ‚Querschnittsoptimierung', bei der für feste Topologie und Geometrie die Querschnitte der Struktur z. B. die Dicken von Schalenbauwerken bzw. die Querschnittswerte von Stabtragwerken modifiziert werden, d. h. die Designvariablen bilden.

- ‚Gestaltsoptimierung', bei der die Geometrie der einzelnen Bauteile bei feststehender Topologie optimal verändert wird.
- ‚Topologieoptimierung', bei der die topologischen Zusammenhänge der Struktur und ggfs. auch die Werkstoffe verändert werden. Hierbei nimmt man entweder von einer homogenen Materialverteilung Material weg (Bilden von Löchern), oder es wird umgekehrt Material dort plaziert, wo es benötigt wird.

Die Entwicklung der Strukturoptimierung begann mit den Arbeiten von J.C. Maxwell (1869) und A.G.M. Michell (1904) zum Aufbau einer Entwurfstheorie (theory of layout). Hierbei wurde die Anordnung von Stäben zur Gewichtsminimierung der Konstruktion unter Berücksichtigung eines speziellen Lastfalls ermittelt. Die optimale Anordnung der Stäbe folgt den Spannungstrajektorien dieses Lastfalls, jedoch ist die Konstruktion unbrauchbar für andere Lastfälle. Auch ist die Stabilität der Druckstäbe nicht berücksichtigt.

Eine Weiterentwichung basierte auf den Arbeiten von Shanley (1960), der in der Theorie gleichzeitiger Versagenszustände (simultaneous mode of failure) Optimalität der Konstruktion dann feststellt, wenn alle Systemteile im Versagenszustand maximal zulässig beansprucht werden. Diese Vorgehensweise entspricht der Ingenieurvorstellung – jedoch ohne Redundanz beim Versagen-, wurde jedoch nicht in eine rationale, algorithmische Methodik umgesetzt. Weiterhin konnte an einigen Gegenbeispielen gezeigt werden, daß mit dieser Methode optimale Geometrien nur für statisch bestimmte Fachwerke erzielt werden können.

Eine direkte Auswertung der Extremalprinzipien der Mechanik, d.h. der Kuhn-Tucker-Bedingungen, und die Herleitung zugehöriger Optimalitätsbedingungen wurde Anfang der sechziger Jahre von W. Prager eingeführt. Der wesentliche Vorteil dieser Algorithmen besteht in der Nähe zur mathematischen Variationsformulierung und der sich ergebenden einfachen Strukturen der iterativen Lösung. Die Einsatzmöglichkeiten dieser ‚Optimalitätskriterien-Methode' beschränkt sich auf einige ausgewählte Probleme mit einfachen Zielfunktionen und Nebenbedingungen, die in den möglichen Anwendungsfällen schnell und effizient gelöst werden. Als Beispiel seien der Abbau von Spannungskonzentrationen unter der Verwendung des Optimalitätskriteriums ‚Randparallele Spannungstrajektorien' genannt.

Die derzeit leistungsfähigsten Algorithmen basieren auf der iterativen Lösung der Kuhn-Tucker-Bedingungen unter Verwendung der Algorithmen der Mathematischen Programmierung. Die Entwicklung dieser Methodik begann Ende der fünfziger Jahre für die gewichtsminimale Konstruktion von Stabwerken unter Berücksichtigung von Spannungsbeschränkungen als lineares Optimierungsproblem. Seitdem wurde eine stetige Entwicklung vollzogen, deren derzeitiger Stand für die Behandlung von Problemen zur Gestalts- und Querschnittsoptimierung im weiteren kurz dargestellt wird.

Die Algorithmen orientieren sich an der obengenannten Tätigkeiten des Ingenieurs im Konstruktionsprozeß und bilden die einzelnen Tätigkeiten innerhalb eines Gesamtalgorithmus ab, wobei insbesondere die folgenden Detailprobleme zu behandeln sind.

- **Konstruieren mittels Computer Aided Design (CAD)**

  Die Wahl eines geeigneten Geometriemodells der betrachteten Struktur sowie die Fähigkeit der schnellen Änderung der Konstruktion und sämtlicher hiervon abgeleiteter Ansichtszeichungen, Detailkonstruktionen etc. ist eine wesentliche Voraussetzung für einen effizienten konstruktiven Entwicklungsprozeß. Diese Fähigkeiten werden in zunehmendem Maße von den kommerziellen CAD-Programmen angeboten. Darüber hinaus bleibt jedoch die geeignete Parametrisierung einer komplexen Struktur mit möglichst wenigen aussagekräftigen Designvariablen eine derzeit noch offene Frage. Ansätze hierzu sind in unserem Institut mit ‚Hierarchischen Geometriemodellen' formuliert worden, welche eine adaptive Steuerung des im Optimierungsprozeß betrachteten Geometriemodells sowie die adaptive Auswahl weniger, aussagekräftiger, geomerischer Designvariablen beinhaltet.

- **Strukturberechnung mittels Finite-Elemente-Methode (FEM)**

  Die Berechnung komplexer Strukturen mit geometrisch und physikalisch nichtlinearem Verhalten ist inzwischen weit entwickelt. Als besonderen Schwerpunkt künftiger Forschung ist die optimale, fehlerkontrollierte selbstadaptive Generierung geeigneter FE-Diskretisierungen anzusehen, bei denen die erforderliche Genauigkeit der Strukturberechnung in Verbindung mit dem gewählten Geometriemodell sowie dem Fortschritt der Optimierung zu setzen ist.

- **Bewertung der Ergebnisse in der Sensitivitätsanalyse**

  Die Sensitivitätsanalyse für beliebiges nichtlineares Strukturverhalten vom elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Typs mit und ohne Nebenbedingungen ist derzeit ein wesentlicher Forschungsschwerpunkt von außerordentlicher Bedeutung für den Gesamtalgorithmus. Die Entwicklung deutet dabei auf eine integrierte Behandlung aller notwendigen Linearisierungen für die Strukturanalyse und die Strukturoptimierung im Rahmen einer modifizierten Elemententwicklung hin. Die ermittelten Sensitivitäten sind darüber hinaus von großer Eigenbedeutung, z. B. für die Beurteilung der Sicherheit von stabilitätsgefährdeten Strukturen gegenüber Imperfektionen.

- **Verbesserung der Lösung durch Einsatz der Mathematischen Optimierung**

  Die Algorithmen der mathematischen Optimierung wurden bereits kurz angesprochen. Die Auswahl eines effektiven Algorithmus ist auf die spezielle Struktur der Optimierungsaufgabe abzustimmen, d. h. insbesondere die Beschränkung auf Gleichheitsnebenbedingungen bzw. Schranken für die Unbekannten ermöglichen den Einsatz wirkungsvoller Spezialalgorithmen.

- **Erfahrung sammeln und weitergeben durch wissensbasierte Systeme (Expertensysteme)**

  Darüber hinaus ist es von großer Bedeutung, die Informationen der Sensitivitätsanalyse sowie die Erfahrungen in der Behandlung von Optimierungsproblemen in die zukünftige Modellierung der Aufgaben der Strukturoptimierung einfließen zu lassen.

3. Weitere neuere Anwendungen von Optimierungsmethoden

Die mathematischen Optimierungsalgorithmen werden in einer Vielzahl anderer Probleme der Strukturmechanik eingesetzt, wobei insbesondere die Themenschwerpunkte ‚Traglast- und verallgemeinerte Einspieltheorie' sowie die ‚Parameteridentifikation' komplexer nichtlinearer Materialgesetze und dynamischer Systeme von großer Bedeutung sind.

Bei der Einspieltheorie (Shake-Down-Theorie) für Systeme aus elastoplastischen Werkstoffen ist die relevante Lastfallkombination a priori nicht bekannt, vielmehr ist nur ein konvexer Lastraum aller möglichen Lasten vorgegeben. Die Algorithmen behandeln daher das Problem des Versagens einer Struktur als Optimierungsproblem, wobei der größte ‚Durchmesser' des Lastraums unter der Bedingung zu finden ist, daß die gesamte plastisch dissipierte Energie stationär wird. Dann nehmen die plastischen Verzerrungen für beliebige Lastzyklen innerhalb des Lastraums nicht mehr zu. Auch hierbei wird für die Strukturanalyse meist die Finite-Elemente-Methode (FEM) aber auch die Randelement-Methode (REM, BEM) eingesetzt.

Bei der Parameteridentifikation von komplizierten Materialgleichungen wird die Problematik der Auswahl geeigneter Materialparameter komplexer Materialmodelle behandelt. Durch die Vorgabe von gemessenen Versuchsdaten, insbesondere auch aus inhomogenen und zyklischen Versuchen, ist der Abgleich der numerischen Rechenergebnisse mit den gemessenen und statistisch gefilterten Versuchsergebnissen durch ein Minimalproblem möglich, dessen Unbekannte die Materialparameter sind.

Es handelt sich hierbei um ein schlecht gestelltes inverses Problem (Hadamard-Problem), für das meist Regularisierungen, z. B. nach Tychonov, erforderlich sind. Die hierfür verwendeten effektiven Algorithmen benötigen die Gradienten der Zielfunktion (gewichtetes Fehlerquadratminimum). Dieses Forschungsgebiet ist von wachsender Bedeutung, denn nur die Identifikation, also der inverse Prozeß, entscheidet, ob die Materialparameter identifizierbar sind oder u. U. als falsifiziert gelten müssen. Von praktischer Bedeutung ist, ob eine gewählte Materialgleichung genügend robust ist, d. h. ob kleine Änderungen der Meßdaten nicht zu großen Änderungen der Materialparameter führen. Auch stochastische Identifikationen aus den rohen Meßdaten unter Einbeziehung der Meßfehler sowie der Geometrie- und Materialimperfektionen werden derzeit erforscht.

4. Ausblick

Für die weitere Entwicklung der Kontinuums- und Strukturmechanik sowie der Strukturoptimierung ergeben sich folgende Schwerpunkte, die sämtlich auf den Einsatz moderner Optimierungsmethoden angewiesen sind.

Betrachten wir zunächst die Materialtheorie, so zeichnen sich die folgenden Entwicklungen ab:

- Verbesserte Stoffgesetze für komplexes Werkstoffverhalten bei zyklischen Deformationen, auch unter Verwendung fraktaler Ableitungen und verschiedener Makrokontinua
- Komposition bzw. Materialsynthese zur Erziehung optimierter Materialeigenschaften
- Beschreibung von Schädigung, Lokalisierung, Phasentransformationen und Werkstoffversagen, d. h. Instabilitäten der Deformation, auch durch Einbeziehung einer oder mehrerer Mesoebenen und Homogenisierungen durch Mittelbildungen oder stochastische Maßtheorien
- Identifikation von makroskopischen Materialparametern

Darüber hinaus sind die folgenden Problemkreise zu nennen:

- Mehrzieloptimierung (Paretooptimierung) unter Beachtung der Stabilität, der Lebensdauer, von Ausnahmelasten, der Gesamtkosten usw.
- Passiv und aktiv geregelte Strukturen in Abhängigkeit der Beanspruchung unter Verwendung von Materialien mit Phasenübergängen
- Lebensdauervorhersagen bei stochastischer Beanspruchung, z. B. für Brücken, Flugzeuge, Schiffe und zugehörige Optimierungen
- Hierarchische Modellierung in der Numerischen Mechanik sowie Integration adaptiver Näherungslösungen mit Modellverbesserungen in Teilgebieten
- Adaptive und hierarchische Methoden in der Strukturoptimierung.

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E. h. Dr. h. c. mult. Erwin Stein
Dr.-Ing. Franz-Joseph Barthold
Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik · Universität Hannover
Appelstraße 9A · 30167 Hannover